

УДК 534.2.532

**ДЕФОРМАЦИЯ РАСПОЛОЖЕННЫХ В ЛИНИЮ
КАВИТАЦИОННЫХ ПУЗЫРЬКОВ
ПРИ ИХ СОВМЕСТНОМ ОДНОКРАТНОМ
РАСШИРЕНИИ-СЖАТИИ***А.И. Давлетшин, Д.Ю. Топорков***Аннотация**

Предлагается математическая модель и методика расчета динамики расположенных в жидкости в линию кавитационных пузырьков при их однократном сильном совместном расширении-сжатии в пучности давления интенсивной стоячей акустической волны. Данная модель представляет собой сочетание модели гидродинамического взаимодействия слабонесферических пузырьков в жидкости (с приближенным учетом ее вязкости и сжимаемости, в предположении гомобаричности пузырьков) и полной гидродинамической модели динамики одиночного сферического пузырька (с учетом нестационарной теплопроводности в паре и жидкости, неравновесных испарения-конденсации, с применением широкодиапазонных уравнений состояния, построенных по экспериментальным данным).

Ключевые слова: Кавитационный пузырек, гидродинамическое взаимодействие пузырьков, деформация пузырьков, сильное сжатие пузырьков.

1. Введение

Такие явления как периодическая однопузырьковая сонолюминесценция [1] свидетельствуют о том, что внутри парогазовых пузырьков при их сильном сжатии в жидкости могут наблюдаться температуры до десятков тысяч градусов. Это представляет значительный интерес как для теории, так и для приложений. Как правило при теоретическом описании динамики пузырьков при их сильном расширении-сжатии предполагается сохранение сферической формы пузырька, что вполне возможно для одиночного пузырька (когда поблизости нет других пузырьков) [1]. Однако во многих важных явлениях число пузырьков, вовлеченных в процесс совместного расширения-сжатия, очень велико. При этом гидродинамическое взаимодействие между ними оказывает значительное влияние на их поведение. В работе [2] впервые представлена математическая модель для изучения влияния гидродинамического взаимодействия пузырьков на их динамику на режиме сильного расширения-сжатия. При этом учет влияния сильного повышения плотности пара в финале сжатия пузырьков производится в этой модели весьма приближенно.

В настоящей работе предлагается математическая модель динамики слабонесферических пузырьков в ходе их сильного совместного расширения-сжатия, в которой более точно, чем в работе [2], учитывается влияние сжатого пара внутри пузырьков. Здесь, как и в [2], рассматривается частный случай, когда пузырьки расположены в линию (в виде кометообразного стримера), которая является осью симметрии задачи. Предлагаемая модель представляет собой сочетание двух моделей, использующихся последовательно на соответствующих стадиях сильного расширения-сжатия пузырьков. Первая из них, модель динамики взаимодействующих слабонесферических пузырьков, в которой предполагается потенциальность

движения жидкости, пренебрегается процессами теплопроводности и испарения-конденсации на межфазной границе, используется на низкоскоростных расширении и начале сжатия пузырька. В качестве второй применяется полная гидродинамическая модель для описания динамики как пара, так и жидкости, учитывается нестационарная теплопроводность в паре и жидкости, неравновесные испарение и конденсация на межфазной границе, применяются широкодиапазонные уравнения состояния, построенные по экспериментальным данным. Такое сочетание оказалось возможным благодаря тому, что в финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков влияние взаимодействия между ними на их динамику становится несущественным.

2. Постановка задачи

Рассматривается динамика расположенных в жидкости в линию (в виде кометобразного стримера) кавитационных пузырьков при их совместном однократном сильном расширении-сжатии. Центры пузырьков расположены на одной прямой, являющейся осью симметрии задачи

В настоящей работе считается, что пузырьки находятся в пучности интенсивной ультразвуковой стоячей волны с давлением p_∞ , изменяющимся по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где t – время, p_a , ω – амплитуда и частота колебаний, p_0 – статическое давление, φ_0 – фаза колебаний при $t = 0$. В фазе отрицательных значений давления жидкости пузырьки, начальный размер которых не превышает нескольких микрон, увеличиваются до величин порядка миллиметра. В фазе положительных значений давления жидкости пузырьки стремительно сжимаются. В результате взаимодействия пузырьки в ходе расширения-сжатия перемещаются вдоль оси симметрии и деформируются.

Уравнение поверхности пузырьков представляется в виде

$$r_i = R_i(t) + \sum_{n=2}^N a_{ni}(t) P_n(\cos \theta_i).$$

Здесь i – номер пузырька ($1 \leq i \leq K$, K – число пузырьков в стримере), r_i , θ_i – радиальная и широтная координаты сферической системы отсчета с началом в центре i -го пузырька, R_i – радиус i -го пузырька, a_{ni} – амплитуда (со знаком) отклонения формы от сферической в виде осесимметричной сферической гармоники – полинома Лежандра P_n степени n от $\cos \theta_i$, N – максимум среди номеров гармоник, определяющих несферичность пузырьков. Отклонения формы пузырьков от сферической предполагаются малыми, так что $|\varepsilon_{ni}| \ll 1$, где $\varepsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$ – безразмерная амплитуда (со знаком) отклонения.

3. Математическая модель низкоскоростной стадии расширения-сжатия пузырьков

На низкоскоростной наиболее продолжительной стадии совместного расширения-сжатия пузырьков, которая включает всю фазу расширения и следующую за ней большую часть фазы сжатия, используется модель динамики взаимодействующих пузырьков, в которой некоторые эффекты в силу их малой значимости не учитываются или учитываются приближенно. В частности, полагается, что на низкоскоростной стадии расширения-сжатия пузырьков эффекты теплопроводности и испарения-конденсации приводят к тому, что давление в

пузырьках p_v незначительно отличается от давления насыщения $p_s(T_0)$, соответствующего температуре окружающей жидкости T_0 . Поэтому влияние этих эффектов можно приближенно учесть, если принять $p_i = p_v = p_s(T_0)$, что и делается в настоящей работе при моделировании низкоскоростной стадии расширения-сжатия пузырьков.

В рамках указанных допущений динамика взаимодействующих пузырьков описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков R_i , координат их центров на оси симметрии z_i и амплитуд отклонений их формы от сферической в виде сферических гармоник a_{ni} [2]

$$\begin{aligned} R_i \ddot{R}_i + \frac{3\dot{R}_i^2}{2} - \frac{\dot{z}_i^2}{4} - \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i} = \\ = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[\frac{\dot{B}_{0j}}{d_{ij}} - \frac{R_j^3 \ddot{z}_j - B_{0j}(\dot{z}_i + 5\dot{z}_j)}{2s_{ij}d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j(\dot{z}_i + 2\dot{z}_j)}{2d_{ij}^3} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1, k \neq i}^K \frac{3B_{0j}B_{0k}}{4s_{ij}s_{ik}d_{ij}^2d_{ik}^2} - \sum_{k=1, k \neq j}^K \frac{(B_{0k}R_j^3)'}{2s_{ij}s_{jk}d_{ij}^2d_{jk}^2} + \frac{3(R_j^2\dot{z}_ja_{2j})'}{10s_{ij}d_{ij}^2} \right] + \psi_{0i} + \Delta_i, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{7\varepsilon_{2i}}{5}\right) R_i \ddot{z}_i + 3 \left(1 - \frac{4\varepsilon_{2i}}{5}\right) \dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{9\dot{z}_i \dot{a}_{2i}}{5} - \sum_{m=2}^N \frac{9\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} \dot{z}_i^2 \varepsilon_{mi}}{5} = \\ = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left[-\frac{3(B_{0j}R_i)'}{s_{ij}d_{ij}^2} + \frac{3(R_i R_j^3 \dot{z}_j)'}{d_{ij}^3} - \frac{6B_{0j}R_i \dot{z}_j}{d_{ij}^3} + \frac{9R_i R_j^3 \dot{z}_j^2}{s_{ij}d_{ij}^4} + \right. \\ \left. + \frac{3(\dot{B}_{0j}a_{2i} + 3B_{0j}\dot{a}_{2i} + 4B_{0j}\dot{R}_i \varepsilon_{2i})}{5s_{ij}d_{ij}^2} + \sum_{m=2}^N \frac{18\bar{\Theta}_{m12}^{1,3} B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{5s_{ij}d_{ij}^2} \right] + \psi_{1i}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \left[R_i \ddot{a}_{ni} + 3\dot{R}_i \dot{a}_{ni} - (n-1) \ddot{R}_i a_{ni} - \frac{3}{2} \sum_{m=2}^N \left(\Theta_{m1n}^{2/3, n-2} \ddot{z}_i a_{mi} - \bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} \dot{z}_i \dot{a}_{mi} \right) \right] + \\ + \frac{9\alpha_{11n} \dot{z}_i^2}{8} - \frac{3\dot{z}_i}{2} \sum_{m=2}^N \left[\frac{3}{2} \left(\sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{\bar{\Theta}_{m1\gamma}^{1,2} \beta_{\gamma 1n}}{\gamma+1} - \chi_{m11n} \right) \dot{z}_i \varepsilon_{mi} + \frac{\beta_{m1n} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi})}{m+1} \right] + \\ + \frac{(n-1)(n+2)\sigma \varepsilon_{ni}}{\rho_0 R_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^K \left\{ \frac{9\beta_{11n} B_{0j} \dot{z}_i}{4s_{ij}d_{ij}^2} - \frac{9\beta_{11n} R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^3} - \frac{5\beta_{21n} R_i B_{0j} \dot{z}_i}{2d_{ij}^3} + \right. \\ + \frac{15\beta_{21n} R_i R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4s_{ij}d_{ij}^4} + \frac{21\beta_{31n} R_i^2 B_{0j} \dot{z}_i}{8s_{ij}d_{ij}^4} + \sum_{k=1, k \neq i}^K \frac{9\beta_{11n} B_{0j} B_{0k}}{8s_{ij}s_{ik}d_{ij}^2d_{ik}^2} + \\ + \frac{9\alpha_{11n} B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{2i}}{10s_{ij}d_{ij}^2} - \sum_{m=2}^N \left[\frac{3\bar{\Theta}_{m1n}^{1,2} (B_{0j} a_{mi})'}{2s_{ij}(n+1)d_{ij}^2} - \right. \\ - \frac{\Theta_{m1n}^{2, m+1} B_{0j} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \varepsilon_{mi})}{2s_{ij}(m+1)d_{ij}^2} - \frac{3B_{0j} \dot{z}_i \varepsilon_{mi}}{2s_{ij}d_{ij}^2} \left(\sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{2\Theta_{\gamma 1n}^{1/2, \gamma+1} \bar{\Theta}_{m1\gamma}^{1,2}}{\gamma+1} - 3\chi_{m11n} \right) \Big] + \\ \left. + \frac{5(R_i^2 B_{0j})'}{3d_{ij}^3} \delta_{2n} - \frac{7(R_i^3 B_{0j})'}{4s_{ij}d_{ij}^4} \delta_{3n} - \frac{5(R_i^2 R_j^3 \dot{z}_j)'}{2s_{ij}d_{ij}^4} + 10R_i^2 B_{0j} s_{ij} \dot{d}_{ij} \delta_{2n} \right\} + \psi_{ni}. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь точка сверху и штрих означают производную по времени, $d_{ij} = |z_i - z_j|$ — расстояние между центрами i -го и j -го пузырьков, δ_{mn} — символ Кронекера, $B_{0i} = -R_i^2 \dot{R}_i$, $s_{ij} = (z_i - z_j)/d_{ij}$, $\Theta_{\gamma 1\varsigma}^{n,k} = nk\alpha_{\gamma 1\varsigma} + \beta_{\gamma 1\varsigma}$, $\bar{\Theta}_{\gamma 1\varsigma}^{n,k} = nk\alpha_{\gamma 1\varsigma} - \beta_{\gamma 1\varsigma}$, $\beta_{\gamma 1\varsigma} = [\gamma(\gamma + 1) + 2 - \varsigma(\varsigma + 1)]\alpha_{\gamma 1\varsigma}/2$, $\alpha_{\gamma 1\varsigma} = \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 \eta P_\gamma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta$, $\chi_{\gamma 11\varsigma} = \frac{2\varsigma+1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) P_\gamma(\eta) P_\varsigma(\eta) d\eta$, ψ_{0i} , ψ_{1i} , ψ_{ni} , Δ_i , — поправки, учитывающие влияние вязкости и сжимаемости жидкости, которые определяются согласно [2].

При выводе уравнений (1)-(3) полагается, что величиной δ^5 по сравнению с 1 можно пренебречь, где $\delta = \max_{ij}[(R_i + R_j)/d_{ij}]$. Это означает, что уравнения (1)-(3) можно применять при не очень малых расстояниях между пузырьками, когда $\delta^5 < 10^{-3}$ или $h/(2R) > 10^{3/5} - 1 \approx 3$, где R , h — характерные радиус пузырьков и расстояние между их поверхностями соответственно.

4. Математическая модель высокоскоростной стадии сжатия пузырьков

В финальной высокоскоростной стадии сжатия пространственные распределение параметров пара в пузырьках становятся все более неоднородным, внутри пузырьков могут формироваться радиально сходящиеся ударные волны. Кроме того, на процесс сжатия оказывают влияние такие эффекты как сжимаемость жидкости, нестационарная теплопроводность в паре и жидкости, неравновесное испарение и конденсация на межфазной поверхности. В то же время, за счет сильного уменьшения радиусов (точнее, уменьшения отношения R_i/d_{ij}) в финальной стадии сжатия влияние взаимодействия между пузырьками становится несущественным. Поэтому при описании финальной стадии сжатия взаимодействие между пузырьками можно не учитывать.

Сравнение изменения радиусов пузырьков в стримере и одиночного неподвижного пузырька показало, что на него не оказывают существенного влияния поступательное движение пузырьков и их малая деформация в силу огромных скоростей их сжатия. Поэтому радиальное движение пузырьков описывается без учета влияния их поступательного движения и деформаций пузырьков. Также полагается, что в силу малости деформаций пузырька и из-за значительного превышения радиальной скоростью пузырька скорости его поступательного движения такие эффекты, как сжимаемость жидкости, неоднородность термодинамических параметров в паре существенно влияют лишь на изменение радиуса пузырьков при его сильном сжатии. При описании поступательного движения пузырьков и искажения их сферической формы эти эффекты не учитываются.

Для описания сферической составляющей движения и пара, и жидкости используется следующая система уравнений [3, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w r^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho w r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho w^2 r^2 + p r^2) &= 2pr, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e r^2) + \frac{\partial}{\partial r}[w r^2(\rho e + p)] &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ρ — плотность, w — радиальная компонента вектора скорости \mathbf{w} , p — давление, $e = U + w^2/2$ — удельная полная энергия, U — удельная внутренняя энергия, T — температура, κ — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия вдали от пузырька ($r \rightarrow \infty$) и на межфазной поверхности ($r = R$) имеют вид [3, 4]:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty : \quad p &= p_\infty, \quad T = T_\infty; \\ r = R(t) : \quad \dot{R} &= w_l + \frac{j}{\rho_l} = w_g + \frac{j}{\rho_g}, \quad p_l = p_g - \frac{4\mu_l w_l}{R} - \frac{2\sigma}{R}, \\ \kappa_l \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_l - \kappa_g \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_g &= j l(p_g), \quad T_l = T_g, \end{aligned} \quad (5)$$

где μ_l – коэффициент вязкости жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, l – теплота парообразования, j – интенсивность фазовых превращений (скорость испарения и конденсации, отнесенная к единице поверхности). Нижние индексы l и g указывают на отношение к жидкости и пару соответственно. Интенсивность фазовых превращений j определяется по формуле Герца-Кнудсена-Ленгмюра [4].

Уравнения состояния жидкости и пара [4] представляют собой сумму потенциальных $p^{(p)}$, $U^{(p)}$ и тепловых $p^{(T)}$, $U^{(T)}$ компонент давления p и внутренней энергии U и константы $U^{(ch)}$ в выражении для U

$$p(\rho, T) = p^{(p)}(\rho) + p^{(T)}(\rho, T), \quad U(\rho, T) = U^{(p)}(\rho) + U^{(T)}(T) + U^{(ch)}. \quad (6)$$

Для описания потенциальных компонент используется обобщенный потенциал Борна-Майера [5]. Тепловые компоненты определяются выражениями

$$\begin{aligned} p^{(T)}(\rho, T) &= \rho \Gamma(\rho) U^{(T)}, \quad U^{(T)} = c_V T, \\ \Gamma(\rho) &= \frac{R_g}{c_V M} \left(g_1 + (1 - g_1) \exp(-(\rho/\rho_1)^{\zeta_1}) + \sum_{k=2}^3 g_k \exp(-(\rho/\rho_k)^{\zeta_k}) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Теплоемкости c_V жидкости и пара полагаются постоянными. Значения параметров выражений (4)-(7) берутся из [5].

Деформация каждого из пузырьков и его поступательное движение в финальной высокоскоростной стадии его сжатия описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, которые получаются из (2), (3) отбрасыванием слагаемых, отвечающих за взаимодействие пузырьков (т.е. заменой $d_{ij} \rightarrow \infty$) и в которых законы изменения R входят в качестве известных параметров из решения системы (4)-(7).

Таким образом, на наиболее продолжительной низкоскоростной стадии совместного расширения-сжатия пузырьков, которая включает всю фазу расширения и следующую за ней большую часть фазы сжатия, используется одна модель (модель динамики взаимодействующих пузырьков), а на высокоскоростной стадии их сжатия – другая (модель динамики одиночного слабонесферического пузырька).

5. Методика расчёта

Система уравнений (1)-(3) при заданных начальных значениях R_i , \dot{R}_i , z_i , \dot{z}_i , a_{ni} , \dot{a}_{ni} решается численно высокоточным методом Дормана-Принса с автоматическим выбором шага интегрирования [6], а решение системы (4)-(7) отыскивается методом Годунова С.К. с применением подвижной сетки, неравномерной и в паре и в жидкости со сгущением к межфазной границе [7].

Естественным способом стыковки решений соответствующих уравнений выглядит применение параметров решения уравнений (1)-(3) в конце низкоскоростной стадии сжатия в качестве начальных данных для уравнений (4)-(7), что и делается

в настоящей работе. Однако финальная стадия сжатия пузырьков сильно зависит от того, какова в момент перехода от одной модели к другой масса пара в пузырьке, каковы поля термодинамических параметров в пузырьке и в окружающей жидкости. В модели взаимодействующих пузырьков эффекты испарения-конденсации в конце низкоскоростной стадии сжатия учитываются грубо, а теплопроводность пара и жидкости и неоднородность давления пара вообще не учитываются. Поэтому для корректного перехода от одной модели к другой пространственные распределения термодинамических параметров в пузырьке и в окружающей жидкости дополнительно рассчитываются по одномерной гидродинамической модели одиночного пузырька (4)-(7) в процессе всей стадии сжатия пузырька. Входными данными в этих расчетах являются параметры сферической составляющей решения, вычисленного по модели динамики взаимодействующих пузырьков на момент их максимального расширения.

6. Результаты расчетов

Рассматривается однократное сильное расширение-сжатие кавитационных пузырьков в воде при температуре $T_0 = 20^\circ \text{C}$, статическом давлении $p_0 = 1$ бар. Давление в пучности стоячей волны p_∞ изменяется с частотой $\omega = 2\pi \times 26.5$ кГц и амплитудой $p_a = 5$ бар. Фаза колебаний давления p_∞ в момент времени $t = 0$ равна $\varphi_0 = \pi/2$. В этот момент давление жидкости p_∞ минимально и равно -4 бар. Давление пара p_i в пузырьках равно $p_s(T_0) \approx 0.024$ бар. Поверхностное натяжение $\sigma = \sigma(T_0) = 0.0729$ Н/м, вязкость жидкости $\mu = \mu(T_0) = 0.001$ Н·с/м², скорость звука в жидкости $c_0 = 1481$ м/с, плотность жидкости $\rho_0 = 998.2$ кг/м³. При $t = 0$ полагается, что скорость поступательного движения пузырьков $\dot{z}_i = 0$, амплитуды отклонения их формы от сферической $a_{ni} = 0$ (если не оговорено противное), скорости изменения амплитуд несферичности $\dot{a}_{ni} = 0$, радиусы пузырьков $R_i = R_0 = 5$ мкм (результаты при $R_0 < 5$ мкм различаются несущественно), скорость их изменения $\dot{R}_i = \dot{R}_0 = 0$. Расстояния между центрами соседних пузырьков в стримере в начале расширения считаются одинаковыми $\bar{d}_0 = d_0/D_{max}$, где d_0 – размерная величина, $D_{max} \approx 300$ мкм – характерный диаметр пузырьков в момент их максимального расширения.

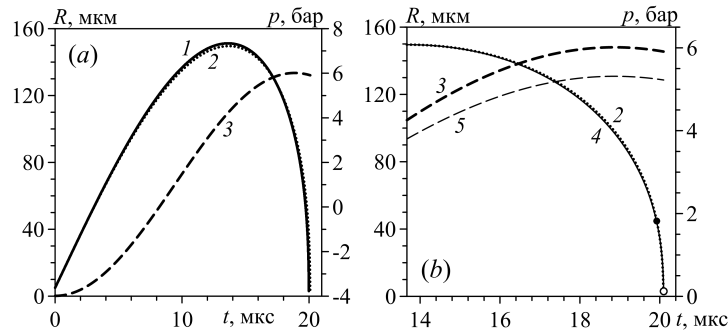


Рис. 1. (a) – изменение радиуса пузырьков в стримере из семи пузырьков при $\bar{d}_0 = 11$ и $p_a = 5$ бар (1 – крайние, 2 – центральный) по модели (1)-(3) и давления p_∞ (3) при расширении-сжатии пузырьков; (b) – изменение радиуса центрального пузырька (2) по модели (1)-(3) при $p_a = 5$ бар на стадии его сжатия и одиночного пузырька по модели (4)-(7) от того же максимального радиуса при $p_a = 4.3$ бар (4) и соответствующих давлений p_∞ (3, 5); точка – момент $\dot{R} = -200$ м/с; кружок – момент $R = R_c$.

Рис. 1 иллюстрирует изменение радиусов взаимодействующих кавитационных

пузырьков при их сильном расширении-сжатии в рамках модели (1)-(3). Точкой показан момент, когда скорость $\dot{R} \approx 200$ м/с, после которого влияние взаимодействия пузырьков на их динамику становится несущественным. Радиусы всех взаимодействующих пузырьков в процессе расширения-сжатия оказываются очень близкими, а радиусы внутренних пузырьков (без крайних) графически не отличаются (пунктирная кривая 2). Согласно представленной численной методике, система (4)-(7) используется для определения пространственных распределений термодинамических параметров в одиночном пузырьке в процессе всего сжатия от R_m . Для сравнения на стадии сжатия приведено изменение радиуса для одиночного сферического пузырька (аналогичных максимальных размеров), полученное по модели (4)-(7) при несколько меньшем значении p_a для лучшего согласования результатов (при одном и том же внешнем возбуждении сжатие одиночного пузырька хоть и незначительно, но все же отличается от сжатия пузырьков в стримере). Как показано на рис. 1b при $p_a = 4.3$ бар изменение радиуса одиночного пузырька при сжатии практически не отличается от изменения радиусов всех внутренних пузырьков.

На рис. 2 проиллюстрирована зависимость деформаций пузырьков от их взаимного расположения в стримере при описании их сильного совместного расширения-сжатия в рамках уравнений (1)-(3). Сжатие пузырька ограничивается значением $R_c/R_m = 0.02$, при котором имеет место экстремальное сжатие среды в кавитационном пузырьке при описании его схлопывания в рамках системы уравнений (4)-(7) (кривая 4 на рис. 1). Отметим, что при значениях $|\varepsilon_{ni}| > 0.3$ результаты расчетов могут иметь большую погрешность.

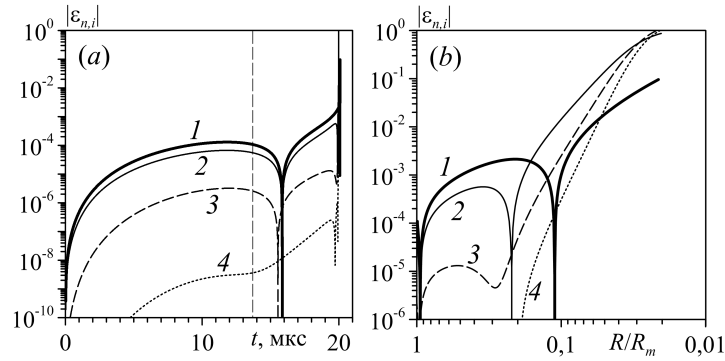


Рис. 2. Деформация пузырьков в стримере из семи равноотстоящих пузырьков по гармоникам с номерами $n = 2$ (кривые 1, 2), 3 (кривые 3), 4 (кривые 4) при $\bar{d}_0 = 11$ (1 – центральный пузырек, 2-4 – крайние), при их расширении-сжатии (a) (вертикальная штриховая линия – граница между расширением и сжатием) и только на стадии их сжатия (b).

Можно отметить, что центральный пузырек деформируется только по гармонике с номером $n = 2$, тогда как боковые – по всем гармоникам, причем центральный пузырек деформируется сильнее боковых в процессе их расширения, но существенно слабее при их сжатии. Вклад искажений сферичности боковых пузырьков в виде отдельных гармоник с ростом n уменьшается. При этом при $R/R_m < 0.3$ все пузырьки сжимаются уже независимо друг от друга.

Что касается крайнего пузырька, то к концу сжатия величина $|\varepsilon_{ni}|$ для всех n окажется близкой к единице, что говорит о возможном разрушении пузырька. И хотя при $|\varepsilon_{ni}| > 0.3$ для бокового пузырька результаты уже могут быть

неудовлетворительными, на остальные пузырьки это не влияет.

Применение полной модели настоящей работы с переходом от системы уравнений (1)-(3) к (4)-(7) и (2),(3), где пренебрегается взаимодействием пузырьков, проиллюстрируем на примере центрального пузырька с номером $i = 4$ и ближайших к нему пузырьков с номерами $i = 3, 5$. Для этих пузырьков с запасом выполняется условие $|\varepsilon_{ni}| < 0.3$ (при $R > R_c$). При этом в начальный момент времени центральный пузырек уже не предполагается сферическим, а задается начальное искажение равное 10^{-2} по каждому из номеров гармоники n . Ненулевое начальное искажение позволяет увидеть характер изменения искажения не только по гармонике с номером 2, но и всем остальным.

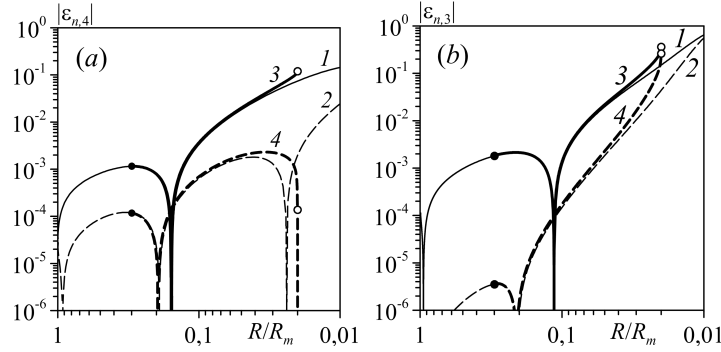


Рис. 3. Деформация при сжатии центрального (a) и ближайшего к нему (b) пузырьков в стримере из семи пузырьков при $\bar{d}_0 = 11$ по гармоникам с номерами $n = 2$ (1, 3) и 3 (2, 4) при $\bar{d}_0 = 11$ (1, 2 – модель (1)-(3), 3, 4 – модель с переходом к (4)-(7)).

На рис. 3 видно, как в финале высокоскоростной стадии сжатия пузырьков при использовании для расчета радиуса пузырька перехода к уравнениям (4)-(7) наблюдается всплеск величины деформации вследствие развития неустойчивости Рэлея-Тейлора на участке торможения сжатия пузырька. При этом для центрального неподвижного пузырька он оказывается меньше, чем для испытывающего поступательное движение. Искражение центрального пузырька по гармонике с номером 3 из-за влияния фазы колебаний формы пузырька оказывается на порядок ниже, чем максимум на стадии сжатия пузырька.

7. Заключение

Предложена математическая модель и методика расчета деформации кавитационных пузырьков в стримере при их совместном сильном расширении-сжатии. В рамках модели реализовано описание поведения жидкости и пара с учетом физико-механических особенностей процесса. При расширении пузырьков и начале их сжатия учитывается взаимодействие пузырьков, но пренебрегается несущественными здесь поведением пара в пузырьке, влиянием сильной сжимаемости жидкости, теплопроводности в паре и жидкости, испарения-конденсации на межфазной границе. В финале сжатия наоборот учитываются все эти факторы, но не учитываются пренебрежимо малое влияние взаимодействия пузырьков.

Работа выполнена в рамках молодежного научного гранта Республики Татарстан (№ 01-92 Т/Г 2014)

Summary

A.I. Davletshin, D.Yu. Toporkov. Deformation of cavitation bubbles arranged in a line at their joint single expansion-compression.

A mathematical model and a technique of computing of the dynamics of cavitation bubbles arranged in a line during their single strong joint expansion-compression in liquid in the pressure antinode of the an intense standing acoustic wave have been proposed. This model is in fact a combination of the model of hydrodynamic interaction of slightly non-spherical bubbles in the liquid (with approximate accounting of its viscosity and compressibility under the assumption of homogeneity of the pressure in the bubbles) and the full hydrodynamic model of the dynamics of a single spherical bubble (with taking into account the nonstationary heat conductivity of the liquid and vapor and the nonequilibrium nature of the vaporization and condensation on the interface, with using wide-range equations of state constructed from the experimental data).

Key words: Cavitation bubble, hydrodynamic interaction of bubbles, deformation of bubbles, strong compression of bubbles.

Литература

1. *Putterman S.J., Weninger K.P.* Sonoluminescence: How Bubbles Turn Sound into Light // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2000. – V. 32. – P. 445–476.
2. *Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю.* Динамика расположенных в линию кавитационных пузырьков в интенсивной акустической волне // *Вычислительные технологии.* – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 3–19.
3. *Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T., Jr., Taleyarkhan R.* The Theory of supercompression of vapor bubbles and nanoscale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids.* – 2005. – V. 17. – P. 107106.
4. *Нигматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред. – М.: Наука, 1987. – Т. 1 и 2.
5. *Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х.* Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // *Теплофизика высоких температур.* – 2011. – Т. 49, № 2. – С. 310–313.
6. *Хайрер Э., Нерсетт С., Виннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
7. *Aganin A.A.* Dynamics of a small bubble in a compressible fluid // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* – 2000. – V. 33. – P. 157–174.

Сведения о каждом из авторов статьи

Давлетшин Анас Ильгизович – к.ф.-м.н., н.с. ИММ КазНЦ РАН

E-mail: davanas@mail.ru

Топорков Дмитрий Юрьевич – к.ф.-м.н., с.н.с. ИММ КазНЦ РАН

E-mail: top.dmr@gmail.com